

# Algèbre



**ECTS**  
9 crédits



**Composante**  
UFR  
Mathématiques



**Volume horaire**  
7h



**Période de  
l'année**  
Semestre 1

## En bref

- **Langue(s) d'enseignement:** Français
- **Méthode d'enseignement:** En présence
- **Organisation de l'enseignement:** Formation initiale
- **Forme d'enseignement :** Cours magistral & Travaux dirigés
- **Ouvert aux étudiants en échange:** Non

## Présentation

### DESCRIPTION

Ce cours d'algèbre se concentre sur trois aspects :

- \* étude approfondie de la divisibilité dans les anneaux (anneaux factoriels, notamment) ;
- \* modules de type fini sur un anneau principal, application à l'algèbre linéaire ( $K[T]K[T]$ -modules) et aux groupes abéliens de type fini ( $ZZ$ -modules) ;
- \* représentations linéaires des groupes finis.

À ce niveau, il est intéressant de :

- \* donner des exemples sophistiqués — par exemple, pour les algèbres
  - \* corps non commutatifs (quaternions de Hamilton),
  - \* algèbre d'un groupe pour le produit de convolution (sous diverses formes, algébrique  $K(G)K(G)$ , mesures

de probabilité, algèbres des fonctions intégrables sur  $RR$ , éventuellement périodiques...)

- \* mettre en évidence les propriétés universelles de certaines constructions ;
- \* éventuellement, mettre en place le vocabulaire catégorique ;
- \* dans une direction opposée, expliquer aussi des méthodes algorithmiques pour effectuer certaines opérations algébriques (déterminer un générateur d'un groupe cyclique dont on connaît le cardinal, par exemple, ou bien une base d'un  $ZZ$ -module, par opérations sur les lignes...)

Sommaire

- \* Algèbres, anneaux — généralités et constructions.
  - \* Définitions
  - \* Anneaux de fractions, anneaux quotients ;
  - \* Anneaux de polynômes, polynômes symétriques, expression en fonction des polynômes symétriques élémentaires
    - \* Idéaux premiers, idéaux maximaux.
    - \* Divisibilité : anneaux euclidiens, principaux, factoriels. Caractère factoriel des anneaux de polynômes.
- \* Modules
  - \* Définitions (ont pu être évoquées en L3), constructions élémentaires, matrices.
  - \* Reprise du vocabulaire d'algèbre linéaire (familles libres, familles génératrices, bases, modules libres)
  - \* Propriétés noethérienne et artinienne. Modules simples, longueur, théorème de Jordan-Hölder.
  - \* Modules de type fini sur un anneau principal
    - \* Cas euclidien : formes normales de Hermite (sur un corps, forme réduite échelonnée) et de Smith

**Pour en savoir plus, rendez-vous sur > [u-paris.fr/choisir-sa-formation](https://u-paris.fr/choisir-sa-formation)**

- \* Application : ZZ-modules (groupes abéliens de type fini) et  $K[T]K[T]$ -modules de longueur finie (algèbre linéaire)
- \* Représentations linéaires des groupes (finis)
  - \* Définition, constructions ; lien avec la théorie des modules ; caractère.
  - \* Semi-simplicité en caractéristique zéro (construction d'un projecteur invariant) ; cas d'une représentation orthogonale ou unitaire
  - \* Sur  $CC$  : Les caractères forment une base orthonormée de l'algèbre des fonctions centrales.
  - \* Exemple : Transformation de Fourier discrète, éventuellement FFT.

## HEURES D'ENSEIGNEMENT

---

Algèbre	Cours Magistral	3h
Algèbre		4h

**Pour en savoir plus, rendez-vous sur > [u-paris.fr/choisir-sa-formation](https://u-paris.fr/choisir-sa-formation)**